Épreuve de Maths **Filières : SMA - SMB** **Coefficient : 9** **Durée : 4 heures**	Royaume du Maroc Ministère de l'Education Nationale De la Formation professionnelle de l'Eseignement supérieur & de la Recherche scientifique	**Examen National du** **BACCALAURÉAT** **Session Principale** **Juin 2006**

■ Exercice Numéro 1 : (03,50 points)

I **Rappel** : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit $G = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \; ; \; (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$.

Soit $H = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \in G \; ; \; b > 0 \right\}$.

On pose : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = A$ et $A^{n+1} = A^n \times A$; $\forall n \in \mathbb{N}$

0,25 **1** Montrer que G est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,75 **2** Montrer que $(G,\times)$ est un groupe. Est-il commutatif ?

0,50 **3** Montrer que $(H,\times)$ est un sous-groupe de $(G,\times)$.

0,50 **4** Calculer A^n en fonction de a et n $avec$ $n \in \mathbb{N}^*$.

II Soit $\top$ l'application définie ainsi :

$$\forall\, (a,b);(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \; : \; (a,b) \top (x,y) = (a + bx \,, by)$$

Soit φ l'application définie ainsi : $\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} (G,\times) & \mapsto & (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\top) \\ M(a,b) & \mapsto & (a,b) \end{array}$

0,75 **1** Montrer que φ est un isomorphisme de $(G,\times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* ; \top)$.

0,25 **2** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* ; \top)$.

0,50 **3** Déterminer le symétrique de $\underbrace{(a,1) \top \cdots \top (a,1)}_{n\ fois\ (a,1)}$ dans $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* ; \top)$

■ Exercice Numéro 2 : (02,50 points)

Soit l'équation : $(E) : \; x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$; $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Soit (x,y) une solution de l'équation (E).

On pose : $d = x \wedge y$; $x = ad$; $y = bd$.

0,25 **1 a** Vérifier que : $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.

0,75 **b** En déduire que : $b = 1$.

0,50 **c** Montrer que $a \neq 1$ et que le nombre $(a-1)$ divise $(a+1)$.

0,50 **d** En déduire que : $oubien \ \ a = 2, \ \ oubien \ \ a = 3$.

0,50 **2** Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) .

■ Exercice Numéro 3 : (05,00 points)

I Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Soit : $P(z) = z^2 - (2+6i)z \ \ ; \ \ z \in \mathbb{C}$.

Soit : $(H) = \{ M(z) \in \mathcal{P} \ \ ; \ \ P(z) \in i\mathbb{R} \}$.

0,50 **1** Montrer que : $(H) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ ; \ \ x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0 \}$.

1,00 **2** Montrer que (H) est une hyperbole puis déterminer ses caractéristiques

0,50 **3** Vérifier que $\mathcal{O} \in (H)$.

Donner une équation de la tangente à (H) en $\mathcal{O}$.

0,75 **4** Construire (H) dans le repère $(\mathcal{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

0,50 **II 1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ainsi proposée : $P(z) = 4 - 6i$.

2 Soient : $u = 1 + 5i$; $v = 1 + i$; $\omega = 239 - i$; $\alpha = Artcan\left(\frac{1}{5}\right)$; $\beta = Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

0,50 **a** Vérifier que : $u^4 \times v = 4\omega$.

0,75 **b** Déterminer $\arg u$, en fonction de α. Puis $\arg(\omega)$ en fonction de β .

0,50 **c** En déduire que : $4\,Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

■ Exercice Numéro 4 : (09,00 points)

Première partie

Soit g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$g_n(x) = nx + 2\ln x \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad n \geq 3$$

0,50 **1** Dresser le tableau de variations de la fonction g_n .

0,50 **2** Montrer que : $(\forall\, x > 0)$; $\sqrt{x} > \ln x$.

0,75 **3 a** Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha_n > 0$.

Montrer que : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

0,25 | b | En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{n\infty}(\alpha_n)$

Deuxième partie

I | Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 3cm.$

0,50 | 1 | Étudier la dérivabilité de la fonction f puis interpréter graphiquement.

0,50 | 2 | Calculer la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement

0,25 | 3 a | Montrer que : $\forall\, x \in\,]0,+\infty[\ ;\ f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

0,25 | b | Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,50 | 4 | Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 | II 1 a | Montrer que : $f(I) \subseteq I \quad ; \quad I = \left[\frac{1}{3};1\right]$

0,50 | b | Montrer que : $(\forall\, x \in I) \quad ; \quad |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

0,50 | c | Montrer que : $\big(f(x) = x \ ; \ x > 0 \big) \iff x = \alpha_3$

2 | Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

0,25 | a | Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n \in I$.

0,25 | b | Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ |u_{n+1} - \alpha_3| = \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$.

0,50 | c | En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ |u_n - \alpha_3| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

0,50 | d | Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

III 1 | Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{8x} f(t)\, dt$$

0,25 | a | Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ puis calculer sa dérivée.

0,75 | b | Étudier la monotonie de la fonction F . (calcul de $F'(x)$; $\forall x \geq 0$)

0,50 | 2 a | Montrer que : $(\forall\, x \geq 0) \ ; \ 0 \leq F(x) \leq 2\, f(x)\, (1 - e^{-7x})$.

0,25 | b | En déduire la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0,25 | c | Dresser le tableau de variations de la fonction F .